Δευτέρα 8/04/2019

ΕΥΘΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΟΜΑΔΩΝ

$G_1, \dots, G_n$ ομάδες

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G_i\}$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2, \dots, a_n *_n b_n)$$

Παραδείγματα

1) $\mathbb{Z}_8, GL_2(\mathbb{R}), U(\mathbb{Z}_{11}), S_7$

άπειρη τάξη γιατί η $GL_2(\mathbb{R})$ έχει άπειρα στοιχεία

$$\mathbb{Z}_8 \times GL_2(\mathbb{R}) \times U(\mathbb{Z}_{11}) \times S_7 = G$$

$$\left([3]_8, \begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}, [4]_{11}, (1,2,3)(7,4,5,6)\right)\left([2]_8, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, [3]_{11}, (1,7)\right) =$$
$$= \left([3]_8 + [2]_8, \begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, [4]_{11} \cdot [3]_{11}, (1,2,3)(7,4,5,6)(1,7)\right) =$$
$$= \left([5]_8, \begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}, [1]_{11}, (1,4,5,6,7,2,3)\right)$$

2) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = G$

$|G| = 3 \cdot 5 = 15$

$G = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (1,0), (1,2), (1,3), (1,4), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\}$

$o((0,0)) = 1$ $\quad$ $o((1,0)) = 3$

$o((0,1)) = 5$ $\quad$ $o((1,1)) = 15 = \text{ΕΚΠ}(3,5)$

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = \langle (1,1) \rangle$. κυκλική

3) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\quad$ $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = 2 \cdot 2 = 4$

$\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$

$o((0,0)) = 1$ $\quad$ $o((0,1)) = 2$

$o((1,0)) = 2$ $\quad$ $o((1,1)) = 2$ $\quad$ Η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι κυκλική

Ομάδα του Klein

$U(\mathbb{Z}_8) = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$

4) $V_4 = \{I, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \leq S_4$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Η $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ είναι αβελιανή αν και μόνο αν όλες οι $G_1, G_2, \ldots, G_n$ είναι αβελιανές

<u>Απόδειξη</u>

($\longleftarrow$) $G_1, G_2, \ldots, G_n$ αβελιανές

Έστω $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2, \ldots, a_n *_n b_n) = (b_1 *_1 a_1, b_2 *_2 a_2, \ldots, b_n *_n a_n)$
$= (b_1, b_2, \ldots, b_n)(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

($\longleftarrow$) $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ αβελιανή

Έστω $a_i, b_i \in G_i$

$(e_1, e_2, \dots, a_i, \dots, e_n)(e_1, e_2, \dots, b_i, \dots, e_n) = (e_1, e_2, \dots, b_i, \dots, e_n)(e_1, e_2, \dots, a_i, \dots, e_n)$
$= (e_1, e_2, \dots, a_i *_i b_i, \dots, e_n) = (e_1, e_2, \dots, b_i *_i a_i, \dots, e_n)$

$a_i *_i b_i = b_i *_i a_i$. Άρα η G_i είναι αβελιανή.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $G_1, G_2, \dots, G_n$ ομάδες και $g_1 \in G_1, \dots, g_n \in G_n$ με $o(g_1) = m_1$, $o(g_2) = m_2, \dots, o(g_n) = m_n$ με $m_i \in \mathbb{N}$.
Τότε $o(g_1, g_2, \dots, g_n) = \text{Ε.Κ.Π.}(o(g_1), o(g_2), \dots, o(g_n)) = \text{Ε.Κ.Π}(m_1, m_2, \dots, m_n) = L$

Απόδειξη

Έστω $m = o(g_1, g_2, \dots, g_n)$

$(g_1, g_2, \dots, g_n)^L = \underbrace{(g_1, g_2, \dots, g_n)(g_1, g_2, \dots, g_n) \dots (g_1, g_2, \dots, g_n)}_{L\text{-φορές}} =$

$= (g_1^L, g_2^L, \dots, g_n^L) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$
$\text{Ε.Κ.Π}(m_1, m_2, \dots, m_n) = L$
m_i / L

Άρα $m = o(g_1, g_2, \dots, g_n) / L \Rightarrow m / L$
$m \leq L$

$o(g_1) = m_1, \quad \dots, \quad o(g_n) = m_n, \quad o(g_1, g_2, \dots, g_n) = \text{Ε.Κ.Π}(m_1, \dots, m_n) = L$

$(g_1, g_2, \dots, g_n)^m = (e_1, e_2, \dots, e_n)^m \Rightarrow (g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$\Rightarrow g_1^m = e_1 \Rightarrow m_1 = o(g_1) / m$
$g_2^m = e_2 \Rightarrow m_2 = o(g_2) / m$
$g_n^m = e_n \Rightarrow m_n = o(g_n) / m$

Άρα m κοινό πολλαπλάσιο $L \leq m$ (ΕΚΠ)

$\left.\begin{matrix} m \leq L \\ L \leq m \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = L$

Άσκηση. Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13}$ είναι κυκλική

$|\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13}| = 11 \cdot 13 = 143$

$o([1]_{11}, [1]_{13}) = \text{Ε.Κ.Π}(o([1]_{11}), o([1]_{13})) = \text{Ε.Κ.Π}(11, 13) = 11 \cdot 13 = 143$

Άρα $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13} = \langle [1]_{11}, [1]_{13} \rangle$ είναι κυκλική

Άσκηση. Δείξτε ότι η $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ δεν είναι κυκλική

Έστω $(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ $\quad o(a) \in \{1,3\}$, $o(b) \in \{1,3\}$

$a, b \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow a, b \in ([0]_3, [1]_3, [2]_3)$

$o((a,b)) = \text{Ε.Κ.Π}(o(a), o(b)) \leq 3$ Άρα η $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ δεν έχει στοιχεία τάξης 9 άρα δεν είναι κυκλική

Ορισμός. Έστω $G_1, G_2, \dots, G_n$ ομάδες και φ απεικόνιση από την G_1 στην G_2. Η φ ονομάζεται ομομορφισμός ομάδων αν $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ για κάθε $a, b \in G_1$

πράξη της G_1 $\quad$ πράξη του G_2

Παράδειγμα.

$GL_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$

↳ πίνακες με $\det A \neq 0$

$\varphi(A) = \det A$

$\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$

πολ/σμος πινάκων $\quad$ πολ/σμος αριθμών.

$\varphi(A \cdot B) = \det(A \cdot B) = \det A \det B = \varphi(A)\varphi(B)$

Άρα φ ομομορφισμός ομάδων

Παράδειγμα.

$S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

$\varphi(\sigma) = \begin{cases} [0]_2, & \sigma \text{ άρτια μετάθεση (διπλ. σε N)} \\ [1]_2, & \sigma \text{ περιττή} \end{cases}$

Έστω $\sigma, \tau \in S_n$

1^{η} περίπτωση: $\sigma, \tau \in A_n \Rightarrow \sigma\cdot\tau \in A_n$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(\sigma\cdot\tau) = [0]_2 \\ \varphi(\sigma) = [0]_2 \\ \varphi(\tau) = [0]_2\end{array}\right\} \text{Άρα } [0]_2 = [0]_2 + [0]_2 \text{ δηλαδή } \varphi(\sigma\cdot\tau) = \varphi(\sigma) + \varphi(\tau).$$

2^{η} περίπτωση: $\sigma \in A_n, \tau \in B_n$, $\sigma\cdot\tau \in B_n$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(\sigma) = [0]_2 \\ \varphi(\tau) = [1]_2 \\ \varphi(\sigma\tau) = [1]_2\end{array}\right\} \text{Άρα } [1]_2 = [0]_2 + [1]_2 \Rightarrow \varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma) + \varphi(\tau)$$

3^{η} περίπτωση: $\sigma \in B_n, \tau \in A_n \Rightarrow \sigma\tau \in B_n$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(\sigma) = [1]_2 \\ \varphi(\tau) = [0]_2 \\ \varphi(\sigma\tau) = [1]_2\end{array}\right\} \text{Άρα } [1]_2 = [0]_2 + [1]_2 \Rightarrow \varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma) + \varphi(\tau).$$

4^{η} περίπτωση: $\sigma, \tau \in B_n \Rightarrow \sigma\tau \in A_n$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(\sigma) = [1]_2 \\ \varphi(\tau) = [1]_2 \\ \varphi(\sigma\tau) = [0]_2\end{array}\right\} \text{Άρα } [0]_2 = [1]_2 + [1]_2 \Rightarrow \varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma) + \varphi(\tau)$$

Άρα φ ομομορφισμός ομάδων.

ΑΣΚΗΣΗ. Δείξτε ότι η $I: G \to G$ όπου $I(g) = g$ είναι ομομορφισμός
G: ομάδα

$I(a\cdot b) = a\cdot b = I(a)\cdot I(b)$ Άρα I ομομορφισμός.

Άσκηση: G_1, G_2 ομάδες. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi(g) = e_2$, $g \in G_1$, e_2 το ουδέτερο στοιχείο της G_2.

Αν $a, b \in G_1$ $\varphi(a\cdot b) = e_2 = e_2\cdot e_2 = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$

$$(\mathbb{R}^+, \cdot) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}, +)$$

θετικοί πραγματικοί

$\varphi(a) = \ln(a)$

$\varphi(a\beta) = \ln(a\beta) = \ln a + \ln \beta = \varphi(a) + \varphi(\beta)$ ομομορφισμός ομάδων

$$(\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}^+)$$

$\theta(a) = 2^a$

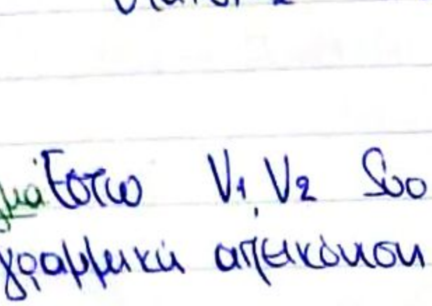
$\theta(a+\beta) = 2^{a+\beta} = 2^a \, 2^\beta = \theta(a)\,\theta(\beta)$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω V_1, V_2 δύο K-διαν. χώροι και $T: V_1 \to V_2$ μια γραμμική απεικόνιση

V_1, V_2 ομάδες ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων

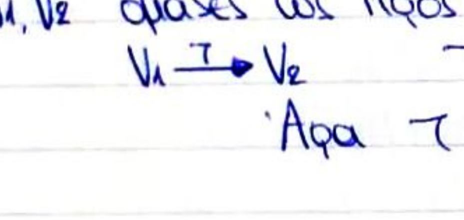
$V_1 \xrightarrow{T} V_2 \qquad T(\vec{a} + \vec{\beta}) = T(\vec{a}) + T(\vec{\beta})$

Άρα T είναι ομομορφισμός ομάδων.



$f(A) = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ εικόνα του A

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in B\}$ αντίστροφη εικόνα του B.



- $A = \{1,2\}$ $\quad f(A) = \{\beta\}$
- $B = \{2,4,3\}$ $\quad f(B) = \{\beta, \alpha, \gamma\}$

$f(X) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ εικόνα της f

- $\Gamma = \{\alpha\}$ $\quad f^{-1}(\Gamma) = \{4\}$
- $\Delta = \{\beta, \gamma\}$ $\quad f^{-1}(\Delta) = \{1,2,3,5\}$
- $E = \{\delta\}$ $\quad f^{-1}(E) = \emptyset$
- $Z = \{\beta, \delta\}$ $\quad f^{-1}(Z) = \{1,2\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω φ ένας ομομορφισμός μιας ομάδας G σε μια ομάδα G'.

1) Αν e το ταυτοτικό στοιχείο της G τότε το $\varphi(e)$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο e' της G'.

2) Αν $a \in G$ τότε $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

3) Αν $H \leq G$ (υποομάδα) τότε $\varphi(H) \leq G'$

4) Αν $K' \leq G'$ τότε $\varphi^{-1}(K') \leq G$

Απόδειξη.

1) $e * e = e \xRightarrow{\varphi \text{ ομομορφ.}} \varphi(e*e) = \varphi(e) \Rightarrow \varphi(e) * \varphi(e) = \varphi(e)$
$= \varphi(e) * e'$

$\xRightarrow[\text{νόμος διαγρ.}]{\text{αριστερός}} \boxed{\varphi(e) = e'}$

2) $a \cdot a^{-1} = e \Rightarrow \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(e) \Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) = e' \Rightarrow \underbrace{(\varphi(a))^{-1} \varphi(a)}_{e'} \varphi(a^{-1}) =$
$= (\varphi(a))^{-1} \cdot e' \Rightarrow e' * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \Rightarrow \boxed{\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}}$

3) $e \in H \Rightarrow \varphi(e) \in \varphi(H) \Rightarrow \varphi(H) \neq \emptyset$.
Έστω $x, y \in \varphi(H) \Rightarrow x = \varphi(a)$, $y = \varphi(b)$ όπου $a, b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$
$\varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) = x \varphi(b)^{-1} = x \cdot y^{-1} \Rightarrow x y^{-1} \in \varphi(H)$

Άρα $\boxed{\varphi(H) \leq G'}$